Die Konstruktion der Differenzen-Differentialgleichung $Aydu^2 + (B + Cu)dudy + (D + Eu + Fuu)ddy = 0$ für konstant angenommenes Element du*

Leonhard Euler

§1 Dass sich diese Differenzen-Differentialgleichung sehr weit erstreckt, wird aus den vielen Formeln, in welche sie sich überführen lässt, leicht eingesehen; meistens umfasst sie aber Fälle von solcher Art, die, weil sie der Riccati-Gleichung ähnlich sind, mit den gewohnten Methoden weder integrierbar noch separierbar gemacht werden können. Denn indem man zuerst $y = e^{\int zdu}$ setzt, wird sie auf diese Differentialgleichung ersten Grades zurückgeführt:

$$dz + \frac{(B + Cu)zdu}{D + Eu + Fuu} + zzdu + \frac{Adu}{D + Eu + Fuu} = 0,$$

welche danach ein sehr weites Feld zu anderen Substitutionen eröffnet. Deswegen glaube ich, dass es der Analysis nicht unwesentlich förderlich sein wird, wenn ich die Konstruktion dieser Gleichung im Allgemeinen lehren werde, was durch das, was ich ich über die Riccati-Gleichung vorgelegt habe, auf die folgende Weise geleistet werden können wird.

*Originaltitel: "Constructio aequationis differentio-differentialis $Aydu^2 + (B + Cu)dudy + (D + Eu + Fuu)ddy = 0$ sumto elemento du constante", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 8* (1763, verfasst 1758): pp. 150–156, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 22, pp. 395 – 402, Eneström-Nummer E274, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

§2 Ich fasse aber y mit einer außer der Größe u die neue Variable x beinhaltenden Integralformel definiert zu werden, sodass in dieser Integration allein x als Variable, die Größe u hingegen als Konstante behandelt wird. Nachdem aber die Integration, ob analytisch, oder über die Konstruktion von Quadraturen, durchgeführt worden ist, wird der Größe x ein gewisser gegebener Wert zugeteilt, wonach das Integral eine gewisse Funktion von u darstellen wird, welche die selbst sei, die die vorgelegte Gleichung angibt. Die ganze Aufgabe geht also darauf zurück, dass jene die Größen u und x beinhaltende Integralformel gefunden wird, welche auf die Weise behandelt den wahren Wert von y darbietet.

§3 Wir wollen also festlegen, dass

$$y = \int Pdx(u+x)^n$$

ist, in welcher Formel P eine gewisse Funktion von x aber frei von u bezeichnet, welche freilich zuerst bestimmt werden muss. Nachdem diese bekannt geworden ist, wird das Integral zumindest über Quadraturen ermöglicht werden, und das für irgendeinen Wert von u, welche in der Integration als konstant angesehen wird. Nachdem dann das Integral so genommen worden ist, das es für einen gewissen x zugeteilten Wert verschwindet, setze man für x einen anderen bestimmten und konstanten Wert fest, welcher natürlich nicht von u abhänge; auf diese Weise wird y einer gewissen festen Funktion von u gleich werden, welche die sei, mit welcher die vorgelegte Gleichung aufgelöst wird.

§4 Auch wenn aber in der Integration $\int Pdx(u+x)^n$ die Größe u für konstant gehalten wird, kann ihr Inkrement dennoch angegeben werden, welches sie erfährt, wenn für u stattdessen $u+du$ festgelegt wird und die Integration in gleicher Weise durchgeführt wird. Aus anderenorts dargelegten Prinzipien wird dieses Inkrement aber als $= ndu \int Pdx(u+x)^{n-1}$ berechnet. Wenn diese Formel auf dieselbe Weise behandelt wird und x nach der Integration ein bestimmter Wert zugeteilt wird, wird, weil

$$y = \int Pdx(u+x)^n$$

war, sofern mit variiertem u zugleich y eine Variation erfährt, nun

$$dy = ndu \int Pdx(u+x)^{n-1}$$

sein. Und wenn wir weiter in gleicher Weise das aus der Variation von u entspringende Differential berechnen, werden wir wegen des konstanten du erlangen:

$$ddy = n(n-1)du^2 \int Pdx(u+x)^{n-2}.$$

§5 Weil wir also in diesen auf die vorgeschriebene Weise so genommenen Integralen, dass x ein bestimmter Wert zugeteilt wird und sie so in Funktionen lediglich von u übergehen, diese Werte haben:

$$y = \int Pdx(u+x)^n, \quad \frac{dy}{dx} = n \int Pdx(u+x)^{n-1}$$

und

$$\frac{ddy}{du^2} = n(n-1) \int Pdx(u+x)^{n-2},$$

ist es notwendig, dass vermöge der vorgelegten Gleichung

$$A \int Pdx(u+x)^n + n(B+Cu) \int Pdx(u+x)^{n-1}$$
$$+n(n-1)(D+Eu+Fuu) \int Pdx(u+x)^{n-2} = 0$$

ist, in welchen Integralen allein u als Variable behandelt angesehen wird, u hingegen für konstant gehalten wird. Diese Gleichung muss aber allein dann Geltung haben, nachdem nach den einzelnen Integrationen der Größe x jener bestimmte von u nicht abhängende Wert zugeteilt worden ist.

§6 Aber im Allgemeinen, bevor x dieser Wert gegeben wird, wird diese Größe nicht verschwinden, sondern eher einer gewissen aus u und x zusammengesetzt Größe gleich werden, welche für den Wert, der selbiger nach den Integrationen zugeteilt wird, in Null übergehe. Es ist ratsam, diese Werte aus der Natur dieser Funktion R selbst heraus zu erschließen, und dies ist auch der Grund, warum ich sie nicht sofort definiert habe.

§7 Solange also x noch variabel ist und u wie eine Konstante behandelt wird, ist es notwendig, dass der Ausdruck $R(u+x)^{n-1}$ dieser Integralformel gleich wird:

$$\begin{aligned}\int Pdx(u+x)^{n-2}\,(&+Auu && +2Aux && +Axx\\ &+nCuu && +nCux && +nBx\\ & && +nBu && \\ &+n(n-1)Fuu && +n(n-1)Eu && +n(n-1)D),\end{aligned}$$

deren Differential deshalb diesem gleich werden muss:

$$(u+x)^{n-2}(udR+xdR+(n-1)Rdx).$$

Weil aber R nicht von u abhängen darf, sind die hinreichenden Bedingungen in diesen Gleichungen enthalten:

$$\begin{aligned}&A+nC+n(n-1)F=0\\&dR=(2A+nC)Pxdx+n(B+(n-1)E)Pdx\\&xdR+(n-1)Rdx=APxxdx+nBPxdx+n(n-1)DPdx.\end{aligned}$$

§8 Wenn der Wert von dR aus der zweiten in der dritten eingesetzt wird, wird man haben:

$$(n-1)R=-(A+nC)Pxx-n(n-1)EPx+n(n-1)DP$$

und weil aus der ersten

$$-A-nC=n(n-1)F$$

ist, geht

$$R=nP(Fxx-Ex+D)$$

hervor. Weiter nimmt wegen

$$2A+nC=-2n(n-1)F-nC$$

die zweite diese Form an:

$$dR=nPdx(-(C+2(n-1)F)x+B+(n-1)E),$$

welche durch jene geteilt gibt:

$$\frac{dR}{R} = \frac{-(C+2(n-1)F)xdx + (B+(n-1)E)dx}{Fxx - Ex + D};$$

daher, nachdem R gefunden worden war, wird

$$Pdx = \frac{Rdx}{n(Fxx - Ex + D)}$$

sein, aber der Exponent n wird über die erste Gleichung bestimmt, woher

$$n = \frac{F - C + \sqrt{(F-C)^2 - 4AF}}{2F}$$

wird.

§9 Hier treten mehrere zu betrachtende Fälle auf, und zuerst in Bezug auf den Exponenten n, wenn er als imaginär hervorgegangen ist – er sei $n = \mu + \nu\sqrt{-1}$ –, ist zu bemerken, dass

$$r^{\sqrt{-1}} = \cos\log r + \sqrt{-1}\sin\log r$$

ist, und daher

$$r^n = r^\mu(\cos\nu\log r + \sqrt{-1}\sin\nu\log r),$$

woher das Imaginäre des Exponenten mithilfe von Sinus auf einfache imaginäre Größen zurückgeführt wird, aus welchen darauf deren gegenseitige Aufhebung leichter erledigt werden wird. Weiter geht das Finden der Funktion R hierauf zurück, dass

$$\log r = -(n-1)\log(Fxx - Ex + D) - \int \frac{Cxdx - Bdx}{Fxx - Ex + D}$$

ist, welche erneut auf diese Form gebracht wird:

$$\log R = -\left(n - 1 + \frac{C}{2F}\right)\log(Fxx - Ex + D) + \left(B - \frac{CE}{2F}\right)\int \frac{dx}{Fxx - Ex + D}$$

Wenn also nicht $B - \frac{CE}{2F} = 0$ ist, ist zu sehen, ob der Nenner $Fxx - Ex + D$ der zu integrierenden Formel zwei einfache reelle und ungleiche oder gleiche Faktoren hat; oder ob sie nicht in solche Faktoren auflösbar ist. Außerdem erfordert der Fall, in dem $F = 0$ ist, eine eigene Entwicklung, welche verschiedenen Fälle ich einzeln durchgehen werde.

I. Der Fall $B = \frac{CE}{2F}$

§10 Die aufzulösende Gleichung wird

$$Ay + \frac{C}{2F}(E + 2Fu)\frac{dy}{du} + (D + Eu + Fuu)\frac{ddy}{du^2} = 0$$

sein, wenn wir für welche $y = \int Pdx(u+x)^n$ nehmen, haben wir zuerst

$$n = \frac{F - C \pm \sqrt{(F-C)^2 - 4AF}}{2F},$$

dann aber

$$R = (D - Ex + Fxx)^{-n+1-\frac{C}{2F}},$$

und daher

$$Pdx = \frac{1}{n}dx(D - Ex + Fxx)^{-n-\frac{C}{2F}},$$

sodass

$$y = \frac{1}{n}\frac{dx(u+x)^n}{(D - Ex + Fxx)^{+n+\frac{C}{2F}}}$$

ist, welches Integral von Grenzen von x von solcher Art erfasst werden muss, mit denen die Größe

$$(u+x)^{n-1}(D - Ex + Fxx)^{-n+1-\frac{C}{2F}}$$

verschwindet.

§11 Sooft also die Formel $D - Ex + Fxx$ zwei reelle Faktoren hat, verschwindet sie in zwei Fällen, woher die beiden Integrationsgrenzen festgelegt werden können; dafür ist aber notwendig, dass ihr Exponent $-n + 1 - \frac{C}{2F}$, der

$$= \frac{F \mp \sqrt{(F-C)^2 - 4AF}}{2F}$$

wird, positiv ist, weil ansonsten jene Größe, welcher die vorgelegte Formel gleich gesetzt wird, nicht in Null überginge. In diesem Fall bereitet also die Konstruktion der Gleichung keine Schwierigkeit, weil wegen des zweideutigen

Vorzeichens dem Exponenten immer ein positiver Wert zugeteilt werden kann. Jener Exponent sei nämlich $= m$, und man wird

$$4FFmm - 4FFm + 4AF + CF - CC = 0$$

haben, wenn welche Gleichung reelle Wurzeln hat, wird wegen des negativen Terms $-4FFm$ die andere gewiss positiv sein wird. Diese Fall wollen wir noch etwas weiter verfolgen.

§12 Es sei $D = aa$, $E = 0$ und $F = -1$, sodass diese Gleichung aufzulösen ist:

$$Ay + \frac{Cudy}{du} + (aa - uu)\frac{ddy}{du^2} = 0,$$

und es wird

$$n = \frac{1 + C \pm \sqrt{1 + 2C + CC + 4A}}{2}$$

sein, deren Wert immer reell ist, wenn A keine negative Größe größer als $\frac{1}{4}(1+C)^2$ ist: Daher wird

$$m = -n + 1 + \frac{1}{2}C = \frac{1 \mp \sqrt{1 + 2C + CC + 4A}}{2}$$

sein; nachdem deren Wert positive angenommen worden ist, wird für die Auflösung unserer Gleichung

$$y = \frac{1}{n}\int dx(u + x)^n (aa - xx)^{m-1}$$

sein, welches Integral so genommen werde, dass es für $x = a$ gesetzt verschwindet; aber dann setze man $x = -a$, und für y wird eine der Gleichung Genüge leistende Funktion von u gefunden werden. Je nachdem ob es nun eine reelle oder imaginäre Zahl war, wollen wir die folgende Beispiele hinzufügen.

§13 *Beispiel 1* Es Sei $C = 2$ und $A = -2$, dass diese Gleichung vorgelegt ist:

$$-2y + \frac{2udy}{du} + \frac{(aa - yy)ddy}{du^2} = 0,$$

es wird $n = 1$ und $m = 1$ sein, woher

$$y = \int dx(u + x)$$

wird und wegen

$$-2y + \frac{2udy}{du} + \frac{(aa - uu)ddy}{du^2} = aa - xx$$

muss die Integration von y so durchgeführt werden, dass für die Integrationsgrenzen $aa - xx$ verschwindet, das heißt, wenn $x = a$ und $x = -a$ war. Es wird also

$$y = ux + \frac{1}{2}xx - au - \frac{1}{2}aa$$

werden und für $x = -a$ gesetzt wird nun $y = -2au$ sein, welcher Wert der Gleichung natürlich genügt, und allgemeiner freilich $y = \alpha u$, woraus weiter das vollständige Integral gefunden wird, indem man $y = uz$ setzt, woher

$$2aadudz + (aa - uu)uddz = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{ddz}{dz} + \frac{2aadu}{u(aa - uu)} = 0$$

oder

$$\frac{ddz}{dz} + \frac{2du}{u} + \frac{2udu}{aa - uu} = 0,$$

welche integriert

$$\frac{uudz}{aa - uu} = \beta du$$

gibt, und weiter

$$z = \gamma - \beta u - \frac{\beta aa}{u},$$

als logische Konsequenz

$$y = \gamma u - \beta uu - \beta aa.$$